



المدة : ساعتين

إمتحان السداسي الاول

مقياس: التحليل

التمرين الأول:

لتكن A مجموعة غير خالية ومحدودة من $\mathbb{R}$ ، ونعرّف: $B = \{|x - y|, x \in A \text{ و } y \in A\}$.

1. أثبت أن: B محدودة من الأعلى.
2. أثبت أن: $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

التمرين الثاني:

I. لتكن $a > 0$ ، نعرّف المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ كما يلي: $U_0 > 0$ و $U_{n+1} = \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{a}{U_n} \right)$.

1. أثبت أن: $U_{n+1}^2 - a = \frac{(U_n^2 - a)^2}{4U_n^2}$.

2. برهن أنه إذا كان $n \geq 1$ فإن: $U_n \geq \sqrt{a}$.

3. استنتج أن المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ متقاربة وأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \sqrt{a}$.

II. باستخدام تعريف النهاية، أثبت أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln(1+n)}{\ln(n)} \right) = 2$.

III. باستخدام معيار كوشي، أثبت أن المتتالية التالية متقاربة:

$$V_n = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(k)}{2^k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

التمرين الثالث:

ليكن α و β عددين حقيقيين، و f دالة معرفة كالتالي: $f(1) = 2$ و

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{\alpha x + \beta}, & x \in]1, +\infty[\\ \alpha^2 x + \beta^2 \frac{\sin(x-1)}{x-1}, & x \in [0, 1[\\ x^3 + \alpha^2 \sin(x+1), & x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

حدد قيم α و β حتى تكون الدالة f مستمرة عند 0 و 1.

التصحيح، النموذجي لامتحان إسداسي 01

التمرين 01 =

1- إثبات أن B محدودة من الأعلى
لدينا A محدودة ومنه:

$$\forall x \in A: \inf(A) \leq x \leq \sup(A) \dots ①$$

$$\forall y \in A: \inf(A) \leq y \leq \sup(A) \dots ①-1$$

$$\sup(A) \leq -y \leq -\inf(A) \dots ②$$

$$① + ②: \inf(A) - \sup(A) \leq x - y \leq \sup(A) - \inf(A)$$

$$-(\sup(A) - \inf(A)) \leq x - y \leq \sup(A) - \inf(A)$$

$$|x - y| \leq \sup(A) - \inf(A) \dots 015$$

$$\sup(A) - \inf(A) = B \text{ محدودة من الأعلى}$$

$$2- \text{إثبات أن } \sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$$

$$\text{كفي أن نبرهن أن } \sup(B) \leq \sup(A) - \inf(A)$$

لدينا:

$$\sup(A) - \inf(A) \text{ حاد من الأعلى لعناصر } B \text{ وعا أن}$$

$$\sup(B) \text{ هو أصغر الحواد العليا فإن:}$$

$$\sup(B) \leq \sup(A) - \inf(A) \dots 0175$$

ولدينا:

$$\forall x \in B: x \leq \sup(B) \text{ إذن:}$$

$$|x - y| \leq \sup(B)$$

$$-\sup(B) \leq x - y \leq \sup(B)$$

$$x \leq y + \sup(B)$$

أي:

$$\text{إذن: } y + \sup(B) \text{ حاد من الأعلى لعناصر } A$$

$$\text{وعا أن } \sup(A) \text{ هو أصغر الحواد العليا}$$

$$\text{فإن: } \sup(A) \leq y + \sup(B) \dots 0175$$

$$\Rightarrow \sup(A) - \sup(B) \leq y$$

$$\text{إذن: } \sup(A) - \sup(B) \text{ حاد من الأسفل}$$

$$\text{لعناصر } A \text{ وعا أن } \inf(A) \text{ هو أكبر الحواد}$$

$$\text{الأسفل لـ } A \text{ فإن: } \inf(A) \leq \sup(B) - \sup(A)$$

$$\sup(B) - \inf(A) \leq \sup(A) \dots 0175$$

من ① و ② نستنتج أن:

$$\sup(B) = \sup(A) - \inf(A) \dots 0125$$

$$\# \text{ التمرين 02} \quad U_{n+1}^2 - a = \frac{(U_n^2 - a)^2}{4 U_n^2} \dots ①$$

$$\text{لدينا: } U_{n+1}^2 - a = \left[\frac{1}{2} \left(U_n + \frac{a}{U_n} \right) \right]^2 - a$$

$$= \frac{1}{4} \left(U_n^2 + 2a + \frac{a^2}{U_n^2} - 4a \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(U_n^2 - 2a + \frac{a^2}{U_n^2} \right)$$

$$= \frac{(U_n^2 - a)^2}{4 U_n^2} \dots \#$$

$$3- \text{إثبات أن } U_n \geq \sqrt{a} \quad n \geq 1$$

لدينا من السابق: 0175

$$U_{n+1}^2 - a \geq 0 \Rightarrow U_{n+1}^2 \geq a \Rightarrow U_n^2 \geq a$$

$$\text{يكفي أن نبرهن أن: } "U_n > 0" \quad \forall n \in \mathbb{N} \dots 015$$

$$\text{من أجل } n=0 \text{ نبرهن صحة } P(0)$$

$$\text{لدينا: } U_0 > 0 \text{ من المعطيات}$$

$$\text{إذن: } P(0) \text{ صحيحة}$$

$$\text{من أجل } n > 0 \text{ نفرض صحة } P(n) \text{ ونبرهن}$$

$$\text{صحة } P(n+1) \text{ أي: } U_{n+1} > 0$$

$$\text{لدينا: } U_{n+1} = \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{a}{U_n} \right) > 0 \dots 0175$$

ومنه: $P(n)$ صحيحة

من ① و ② عر حسب مبدأ البرهان بالتراجع

$$\text{فإن: } U_n > 0$$

III - لإثبات أن المتتالية U_n متقاربة يكفي أن

نبرهن أنها متتالية كوشي: (015)
 $\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall p, q: p > q \geq n: |U_p - U_q| < \varepsilon$

لدينا: $|U_p - U_q| = \left| \sum_{k=1}^p \frac{\sin k}{2^k} - \sum_{k=1}^q \frac{\sin k}{2^k} \right|$

(015) $= \left| \sum_{k=q+1}^p \frac{\sin k}{2^k} \right| \leq \sum_{k=q+1}^p \frac{1}{2^k}$

$\sum_{k=1}^p \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{q+1}} + \frac{1}{2^{q+2}} + \dots + \frac{1}{2^p}$ (015)

$= \frac{1}{2^{q+1}} \left[\frac{1 - \frac{1}{2^{p-q}}}{1 - \frac{1}{2}} \right]$ (015)

$= \frac{1}{2^q} \left(1 - \frac{1}{2^{p-q}} \right) < \frac{1}{2^q} < \varepsilon$

$\Rightarrow 2^q > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow q > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$ (015)

نعلم أن: $\left[-\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2} \right] < -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2} < \left[-\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2} \right] + 1$

(015) $n_0 = \left[-\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2} \right] + 1$ إذن نأخذ:

ولذلك (U_n) متتالية كوشي وبالتالي فهي متقاربة

التمرين 3 = $f(1) = 2$

الاستمرارية عند 0:

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\alpha^2 x + \beta^2 \frac{\sin(x-1)}{x-1} \right]$

$= \beta^2 \sin(1)$ (015)

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\alpha^3 + \alpha^2 \sin(x+1) \right]$

$= \alpha^2 \sin(1)$ (015)

لكي يكون مستمر عند 0 يجب أن يكون:

$\beta^2 = \alpha^2$

لذلك: $U_n^2 \geq a$

$\Rightarrow \sqrt{U_n^2} \geq \sqrt{a} \Rightarrow U_n \geq \sqrt{a}$ # (015)

3- استنتاج أن: (U_n) متقاربة:

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{a}{U_n} \right) - U_n$

(1) $= \frac{U_n^2 + a - 2U_n^2}{2U_n} = \frac{a - U_n^2}{2U_n} < 0$

نما أن (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل

بـ $\sqrt{a}$ فإن: (U_n) متقاربة (015)

4- حساب النهاية: $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \sqrt{a}$

لدينا: $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = l = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{n+1}$

ومن: $l = \frac{1}{2} \left(l + \frac{a}{l} \right)$ (1)

$l = l + \frac{a}{l} \Rightarrow l = \frac{a}{l} \Rightarrow l^2 = a \Rightarrow l = \sqrt{a}$

II - إثبات أن: $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{\ln(1+n)}{\ln(n)} = 2$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ (015)

$\Rightarrow \left| 2 \frac{\ln(1+n)}{\ln(n)} - 2 \right| < \varepsilon$

لدينا: $\left| 2 \frac{\ln(1+n)}{\ln(n)} - 2 \right| = \left| \frac{2\ln(1+n) - 2\ln(n)}{\ln(n)} \right|$

$= \left| \frac{2\ln\left(\frac{1+n}{n}\right)}{\ln(n)} \right| = 2 \frac{\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right)}{\ln(n)}$ (015)

لدينا: $\frac{1}{n} < 1 \Rightarrow \frac{1}{n} + 1 < 2$

$\Leftrightarrow \frac{2\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right)}{\ln(n)} < \frac{2\ln 2}{\ln(n)} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow n > e^{\frac{\ln 4}{\varepsilon}}$ (015)

نعلم أن: $\left[e^{\frac{\ln 4}{\varepsilon}} \right] < e^{\frac{\ln 4}{\varepsilon}} < \left[e^{\frac{\ln 4}{\varepsilon}} \right] + 1$

(015) $n = \left[e^{\frac{\ln 4}{\varepsilon}} \right] + 1$ يكفي أن نأخذ: